BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2007

RİYAZİYYAT

МНОГОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

М.А.КУЛИЕВ
Бакинский Государственный Университет

В работе с помощью обобщенного принципа сжатых отображений доказана теорема существования и единственности классического решения рассматриваемой задачи.

В работе исследуется классическое решение многомерной обратной краевой задачи для систем линейных гиперболических уравнений в ограниченной области. Предполагается, что неизвестные коэффициенты и правая часть уравнения зависят только от аргумента t. А именно рассматривается:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - Au(x,t) = a_1(t)b(x,t)u(x,t) + c_1(t)d(x,t)v(x,t) + f\ (t)F(x,t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - Av(x,t) = a_2(t)\tilde{b}(x,t)u(x,t) + c_2(t)\tilde{d}(x,t)v(x,t) + f_2(t)G(x,t), \tag{2}$$

$$(x,t) \in D_T = \overline{\Omega} \times [0,T],$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{3}$$

$$v(x,0) = \tilde{\varphi}(x), \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \tilde{\psi}(x) \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{4}$$

$$u(x,t)\big|_{\Gamma_T} = 0, \quad v(x,t)\big|_{\Gamma_T} = 0, \qquad \Gamma_T \equiv S \times [0,T] \tag{5}$$

$$u(x^i,t) = h_i(t) \ \ (i = 1,2,3),\ t \in [0,T], \tag{6}$$

$$v(x^i,t) = g_i(t) \ \ (i = 1,2,3),\ t \in [0,T], \tag{7}$$

где $0 < T < +\infty$; Ω - произвольная ограниченная n-мерная область, S - граница области Ω, Γ_T - боковая поверхность цилиндра $\overline{D}_T = \overline{\Omega} \times [0,T]$, $x^i \left(i = \overline{1,3}\right)$ - различные фиксированные точки в Ω, а оператор L имеет вид:

$$Au(x,t)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right)-K(x)u(x,t), \qquad (8)$$

причем всюду на $\overline{\Omega}$ функций $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$, $K(x)\geq 0$ - измеримы, ограничены в Ω и $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \mu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$, $\mu=const>0$, $\xi_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ - любые действительные числа.

Функции $b(x,t)$, $\widetilde{b}(x,t)$, $d(x,t)$, $\widetilde{d}(x,t)$, $F(x,t)$, $G(x,t)$, $\varphi(x)$, $\widetilde{\varphi}(x)$, $\psi(x)$, $\widetilde{\psi}(x)$, $h_i(t)$ и $g_i(t)$ $\left(i=\overline{1,3}\right)$ - заданные, а $u(x,t)$, $v(x,t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$ $c_1(t)$, $c_2(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, искомые.

Определение. Функции $\{u(x,t), v(x,t), a_1(t), a_2(t), c_1(t), c_2(t), f_1(t), f_2(t)\}$ назовем классическим решением задачи (1)-(7), если выполняются следующие условия:

1.Функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}_T$;

2.Функции $a_1(t)$, $a_2(t)$, $c_1(t)$, $c_2(t)$, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ непрерывны на $[0,T]$;

3.Условия (1)-(7) выполняются в обычном классическом смысле.

С целью исследования задачи (1)-(7) введем следующие пространства.

Обозначим через $B_{2,T}^{k;k-1}$ совокупность всех функций $u(x,t)$ вида $u(x,t)=\sum_{s=1}^{\infty}u_s(t)\mu_s(x)$ с непрерывно дифференцируемыми на $[0,T]$ $u_s(t)$ $(s=1,2,...)$ таким, что

$$\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^k\max_{0\leq t\leq t}|u_s(t)|\right)^2\right\}^{1/2}+\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^{k-1}\max_{0\leq t\leq t}|u_s'(t)|\right)^2\right\}^{1/2}\equiv R_T(u)<+\infty .$$

Здесь $k\geq 1, 0>\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots u\,\mu_s(t)$ $(s=1,2,\ldots)-$ собственные значение и соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ обобщенные собственные функции первой однородной краевой задачи для оператора A в Ω. Нормы в этом множестве определим так: $\|u\|=R_T(u)$. Известно [4], что все эти пространства банаховы.

Предположим, что функции $a_{ij}(x)(i_{ij}=\overline{1,n}), k(x), b(x,t), \widetilde{b}(x,t)$, $d(x,t)$, $\widetilde{d}(x,t)$, $F(x,t)$, $G(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\widetilde{\varphi}(x)$, $\widetilde{\psi}(x)$, $h_i(t)$ и $g_i(t)$ $(i=\overline{1,3})$ удовлетворяют следующим условиям:

1. Функция $a_{ij}(x)(i=\overline{1,n})$ $\left[\frac{n}{2}\right]+2$ раза, а функция $k(x)\geq 0$ $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ раз непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$.
2. $S\in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}$
3. Собственные функции $\mu_k(x)$ оператора A при граничном условии

$\mu_k(x)\big|_S = 0\,(k=1,2,\ldots)\left[\dfrac{n}{2}\right]+3$ раза непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$.

4. Функции $\varphi(x)\in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(\Omega),\ \varphi(x)\big|_S = A\varphi(x)\big|_S = \ldots = A^{\left[\frac{n}{4}\right]+1}\varphi(x)\big|_S = 0,$

$\widetilde{\varphi}(x)\in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(\Omega), \widetilde{\varphi}(x)\big|_S = A\widetilde{\varphi}(x)\big|_S = \ldots = A^{\left[\frac{n}{4}\right]+1}\varphi(x)\big|_S = 0,$

$\Psi(x)\in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(\Omega), \Psi(x)\big|_S = A\Psi(x)\big|_S = \ldots = A^{\left[\frac{n+2}{4}\right]}\Psi(x)\big|_S = 0,$

$\widetilde{\Psi}(x)\in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(\Omega), \widetilde{\Psi}(x)\big|_S = A\Psi(x)\big|_S = \ldots = A^{\left[\frac{n+2}{4}\right]}\Psi(x)\big|_S = 0,$

5. Функции $\dfrac{\partial^i b(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}, \dfrac{\partial^i \widetilde{b}(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}, \dfrac{\partial^i d(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}, \dfrac{\partial^i \widetilde{d}(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}},$

$i=\overline{1,\left[\dfrac{n}{2}\right]+2}$ принадлежат пространству $C(\overline{D})$ и

$$\frac{\partial^j b(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}=0,\ \frac{\partial^j \widetilde{b}(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}=0,\ \frac{\partial^j d(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}=0,\ \frac{\partial^j \widetilde{d}(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}=0$$

$$\left(t\in[0,T], x\in S;\ j=\overline{0,2\left[\frac{n+2}{2}\right]}\right)$$

6. Функции $F(x,t), G(x,t)$ принадлежат пространству $W_{x,t,2}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2,0}(D_T)$ и

$$F(x,t)\big|_{\Gamma_T} = AF(x,t)\big|_{\Gamma_T} = \ldots = A^{\left[\frac{n+2}{4}\right]}F(x,t)\big|_{\Gamma_T} = 0,$$

$$G(x,t)\big|_{\Gamma_T} = AG(x,t)\big|_{\Gamma_T} = \ldots = A^{\left[\frac{n+2}{4}\right]}G(x,t)\big|_{\Gamma_T} = 0.$$

7. Функции $h_i(t)\neq 0, g(t)\neq 0\quad (i=\overline{1,3})$ дважды непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$ и $h_i(0)=\varphi(x^i), h_i^{/}(0)=\Psi(x^i),\quad g_i(0)=\widetilde{\varphi}(x^i),\quad g_i^{/}(0)=\widetilde{\Psi}(x^i)$ $(i=\overline{1,3})$

8. $$\Delta(t)=\begin{vmatrix} b(x^1,t)h_1(t) & d(x^1,t)g_1(t) & F(x^1,t)\\ \widetilde{b}(x^2,t)h_2(t) & \widetilde{d}(x^2,t)g_2(t) & F(x^2,t)\\ \widetilde{b}(x^3,t)h_3(t) & \widetilde{d}(x^3,t)g_3(t) & F(x^3,t)\end{vmatrix}\neq 0\ \forall t\in[0,T],$$

$$\widetilde{\Delta}(t)=\begin{vmatrix} \widetilde{b}(x^1,t)h_1(t) & \widetilde{d}(x^1,t)g_1(t) & G(x^1,t)\\ b(x^2,t)h_2(t) & d(x^2,t)g_2(t) & G(x^2,t)\\ b(x^3,t)h_3(t) & d(x^3,t)g_3(t) & G(x^3,t)\end{vmatrix}\neq 0\ \forall t\in[0,T].$$

При выполнение условий 1-8, применяя метод Фурье и учитывая условия 6 и 7, решения задачи (1)-(7) сведем к решению следующей системы интегральных уравнений:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k \cos_k t\mu_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Psi_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t\mu_k(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\int_0^t\int_\Omega\left[a_1(\tau)b(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+c_1(\tau)d(\xi,\tau)\nu(\xi,\tau)+\right. \tag{8}$$

$$\left.+f_1(\tau)F(\xi,\tau)\right]\sin\lambda_k(t-\tau)\mu_k(\xi)d\xi d\tau\,\mu_k(x),$$

$$\nu(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{\varphi}_k \cos_k t\mu_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\widetilde{\Psi}_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t\mu_k(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\int_0^t\int_\Omega\left[a_2(\tau)\widetilde{b}(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+c_2(\tau)\widetilde{d}(\xi,\tau)\nu(\xi,\tau)+\right.$$

$$\left.+f_2(\tau)G(\xi,\tau)\right]\times\sin\lambda_k(t-\tau)\mu_k(\xi)d\xi d\,\mu_k(x), \tag{9}$$

$$\begin{cases} a_1(t)=\dfrac{1}{\Delta(t)}\sum\limits_{i}^{3}A_{i1}\phi_i(u,v,a_1,c_1,f_i;t)\\ c_1(t)=\dfrac{1}{\Delta(t)}\sum\limits_{i}^{3}A_{i2}\phi_i(u,v,a_1,c_1,f_i;t)\\ f_1(t)=\dfrac{1}{\Delta(t)}\sum\limits_{i}^{3}A_{i3}\phi_i(u,v,a_1,c_1,f_i;t)\end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} a_2(t)=\dfrac{1}{\widetilde{\Delta}(t)}\sum\limits_{i}^{3}\widetilde{A}_{i1}\widetilde{\phi}_i(u,v,a_2,c_2,f_2;t)\\ c_2(t)=\dfrac{1}{\widetilde{\Delta}(t)}\sum\limits_{i}^{3}\widetilde{A}_{i2}\widetilde{\phi}_i(u,v,a_2,c_2,f_2;t)\\ f_2(t)=\dfrac{1}{\widetilde{\Delta}(t)}\sum\limits_{i}^{3}\widetilde{A}_{i3}\widetilde{\phi}_i(u,v,a_2,c_2,f_2;t),\end{cases} \tag{11}$$

где

$$\phi_i(u,v,a_1,c_1,f_i,t)=h_i''(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\varphi_k\cos\lambda_k t\mu_k(x^i)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\varphi_k\sin\lambda_k t\mu_k(x^i)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t\int_\Omega\lambda_k\left[a_1(\tau)b(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+c_1(\tau)d(\xi,\tau)\nu(\xi,\tau)+f_1(\tau)F(\xi,\tau)\right]\times$$

$$\times\sin\lambda_k(t-\tau)\mu_k(\xi)d\xi d\tau\;\;\mu_k(x^i)\qquad (i=\overline{1,3})$$

$$\widetilde{\phi}_i(u,v,a_2,c_2,f_2,t)=g_i''(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\widetilde{\varphi}_k\cos\lambda_k t\mu_k(x^i)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\widetilde{\Psi}_k\sin\lambda_k t\mu_k(x^i)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_\Omega\lambda_k\left[a_2(\tau)\widetilde{b}(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+c_2(\tau)\widetilde{d}(\xi,\tau)\nu(\xi,\tau)+f_2(\tau)G(\xi,\tau)\right]\times \qquad ,$$

$$\times\sin\lambda_k(t-\tau)\mu_k(\xi)d\xi d\tau\;\;\mu_k(x^i)\qquad (i=\overline{1,3})$$

$A_{ij}(t)$ -алгебраическое дополнение элемента b_{ij} определителя $\Delta(t)$, $\widetilde{A}_{ij}(t)$ - алгебраическое дополнение элемента $\widetilde{b}_{ij}$ определителя $\widetilde{\Delta}(t)$.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть выполнены условия 1-8. Тогда при достаточно малых значениях T задача (1)-(7) имеет единственное классическое решение.

Доказательство. Запишем систему (9)-(10) в виде

$$z = Lz, \tag{12}$$

где $z = \{u(x,t), v(x,t), a_1(t), a_2(t), c_1(t), c_2(t), f_1(t), f_2(t)\}$,

$$Lz = \left(L_1(z), L_2(z), L_3(z), L_4(z), L_5(z)L_6(z), L_7(z), L_8(z)\right),$$

причем компоненты $L_i(z)\ (i=\overline{1,8})$ оператора Lz равны правым частям уравнений (9)-(11), соответственно. А это означает, что мы должны найти неподвижную точку оператора Lz в пространстве

$$E_T = \left(B_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}\right)^2 \times \left(C[0,T]\right)^6,$$ причем норму в E_T определим так:

$$\left\|(u, v_1, a_1, a_2, a_{3,} a_4, a_5, a_6)\right\|_{E_T} = \|u\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}} + \|v\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}} + \sum_{i=1}^{6}\|a_i\|_{c[0,T]}$$

Рассмотрим оператор $L(u,v,a_1,a_2,c_1,c_2,f_1,f_2)$ в шаре $K_R(\|Z\|_{E_T} \le R)$ пространства E_T где,

$$C\left(\|\varphi\|_{W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(\Omega)} + \|\Psi\|_{W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(\Omega)} + \|\widetilde{\varphi}\|_{W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(\Omega)} + \|\widetilde{\Psi}\|_{W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(\Omega)}\right) +$$

$$+\left(\min_{0\le t\le T}|\Delta(t)|\right)^{-1}\sum_{i,j=1}^{3}\|A_{ji}(t)\|_{C[0,T]}\left[\|h_i''(t)\|_{C[0,T]} + C\left(\|\varphi\|_{W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(\Omega)} + \|\Psi\|_{W_2^{\left[\frac{n}{4}\right]+2}(\Omega)}\right)\times\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_s(x^i)}{\lambda_s^{\left[\frac{n}{4}\right]+1}}\right)^2\right\}^{1/2}\right] +$$

$$+\left(\min_{0\le t\le T}|\Delta(t)|\right)^{-1}\sum_{i,j=1}^{3}\|A_{ji}(t)\|_{C[0,T]}\left[\|g_i''(t)\|_{C[0,T]} + C\left(\|\widetilde{\varphi}\|_{W_2^{\left[\frac{n}{4}\right]+3}(\Omega)} + \|\widetilde{\Psi}\|_{W_2^{\left[\frac{n}{4}\right]+2}(\Omega)}\right)\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_s(x^i)}{\lambda_s^{\left[\frac{n}{4}\right]+1}}\right)^2\right\}^{1/2}\right], \tag{13}$$

где $c > 0$ - некоторая постоянная.

Пользуясь условиями 5-8 теоремы и тем, что в Ω $\mu_s(x) = -\frac{1}{\lambda^s}A\mu_s(x)$ для любого $(u,v,a_1,a_2,c_1,c_2,f_1,f_2) \in K_R$, имеем:

$$\|L(u,v,a_1,a_2,c_1,c_2,f_1,f_2)\|_{E_T} \le \|W_1(x,t)\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}} + \|W_5(x,t)\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}} +$$

$$+\sum_{i=2}^{4}\left\|W_i(x,t)\right\|_{c[0,T]}+\sum_{i=6}^{8}\left\|W_i(x,t)\right\|_{c[0,T]}+\Bigl[\sqrt{2T+1}\,q_1+q_2\sum_{i,j=1}^{3}\Bigl(\left\|A_{ij}(t)_{c[0,T]}\right\|+$$

$$+\left\|\widetilde{A}_{ij}(t)_{c[0,T]}\right\|\Bigr)\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_s(x^i)}{\lambda_s^{\left[\frac{n}{4}\right]+1}}\right)^2\right\}^{1/2}\Bigr]\Bigl[\left\|Q(u(x,t),v(x,t),a_1(t)c_1(t)f_1(t))\right\|_{W_{x,t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2,0}(D_T)}+$$

$$+\left\|\widetilde{Q}(u(x,t),v(x,t),a_2(t),c_2(t),f_2(t))\right\|_{W_{x,t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2,0}(D_T)}\Bigr], \tag{14}$$

где $q_1>0, q_2>0$ -некоторые постоянные и

$$W_1(x,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\varphi_3\cos\lambda_s+\mu_s(x)+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\Psi_s}{\lambda_s}\sin\lambda_s t\cdot\mu_s(x), \tag{15}$$

$$W_{i+1}(x,t)=\frac{1}{\Delta(t)}\sum_{s=1}^{3}A_{ji}(t)\left[h_i''(t)+\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s\left(\lambda_s\varphi_s\cos\lambda_s t+\Psi_s sin\lambda_s t\right)\mu_s(x^i),\right. \tag{16}$$

$$(i=\overline{1,3})$$

$$W_5(x,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\widetilde{\varphi}_s\cos\lambda_s\cdot\mu_s(x)+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\widetilde{\varphi}_s}{\lambda_s}\sin\lambda_s t\cdot\mu_s(x), \tag{17}$$

$$W_{i+5}(x,t)=\frac{1}{\widetilde{\Delta}(t)}\sum_{j=1}^{3}\widetilde{A}_{ji}(t)\left[g_i''(t)+\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s\left(\lambda_s\widetilde{\varphi}_s\cos\lambda_s t+\widetilde{\Psi}_s sin\lambda_s t\right)\mu_s(x^i)\right] \tag{18}$$

$$\begin{aligned}&Q(u(\xi,\tau),v(\xi,\tau),a_1(\tau),c_1(\tau),f_1(\tau))=a_1(\tau)b(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+\\&+c_1(\tau)d(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+f_1(\tau)F(\xi,\tau)\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}&\widetilde{Q}(u(\xi,\tau),v(\xi,\tau),a_2(\tau),c_2(\tau),f_2(\tau))=a_2(\tau)\widetilde{b}(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+\\&+c_2(\tau)\widetilde{d}(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+f_2(\tau)G(\xi,\tau)\end{aligned} \tag{20}$$

Пользуясь теоремами вложения С.Л.Соболева и структурой пространства $B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}$ для любых $u,v\in B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}$ и $t\in[0,T]$, имеем

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{\partial^i u(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\right\|_{L_2(\Omega)}\le q_3\|u\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}}\quad\left(i=\overline{0,\left[\frac{n}{2}\right]+3}\right),\\&\left\|\frac{\partial^i v(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\right\|_{L_2(\Omega)}\le q_4\|v\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}}\quad\left(i=\overline{0,\left[\frac{n}{2}\right]+3}\right),\end{aligned} \tag{21}$$

где $q_3>0, q_4>0$ некоторая постоянная не зависящая от u,v,t.

Тогда с учетом оценки (21), из (14) получаем, что

$u,v,a_1,a_2,c_1,c_2,f_1,f_2\in K_R$:

$$\left\|L(u,v,a_1,a_2,c_1,c_2,f_1,f_2)\right\|_{E_T}\le\left\|W_1(x,t)\right\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}}+\left\|W_5(x,t)\right\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2,\left[\frac{n}{2}\right]+2}}+$$

$$+\sum_{i=2}^{4}\left\|W_i(x,t)\right\|_{c[0,T]}+\sum_{i=6}^{8}\left\|W_i(x,t)\right\|_{c[0,T]}+\sqrt{T}\cdot K_1\cdot C_R, \tag{22}$$

где $$K_1=\sqrt{2T+1}q_1+q_2\sum_{ij=1}^{3}\left(\left\|A_{ij}(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|\widetilde{A}_{ij}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_s(x^i)}{\lambda_s^{\left[\frac{n}{4}\right]+1}}\right)^2\right\}^{1/2},$$

где $C_R>0$ – некоторое число, зависящее от R.

Покажем, что некоторая итерация оператора L являются сжимающим оператором. Действительно, рассмотрим два произвольных элемента W и $\widetilde{W}$ из шара K_R.

Построим их образы с помощью последовательных итераций оператора L.

Тогда имеем

$$W_0=W,\ W_1=L(W_0),\ldots,W_k=L(W_{k-1}),\ldots$$

и $$\widetilde{W}_0=\widetilde{W},\ \widetilde{W}_1=L(\widetilde{W}_0),\ldots,\widetilde{W}_k=L(\widetilde{W}_{k-1}),\ldots$$

где $$W_k=\left\{u_k,v_k,a_1^{(k)},a_2^{(k)},c_1^{(k)},c_2^{(k)},f_1^{(k)},f_2^{(k)}\right\}$$

$$\widetilde{W}_k=\left\{\widetilde{u}_k,\widetilde{v}_k,\widetilde{a}_1^{(k)},\widetilde{a}_2^{(k)},\widetilde{c}_1^{(k)},\widetilde{c}_2^{(k)},\widetilde{f}_1^{(k)},\widetilde{f}_2^{(k)}\right\}$$

$$u_0=u,v_0=v,a_1^{(0)}=a_1,a_2^{(0)}=a_2,c_1^{(0)}=c_1,c_2^{(0)}=c_2,f_1^{(0)}=f_1,f_2^{(0)}=f_2,$$

$$\widetilde{u}_0=\widetilde{u},\widetilde{v}_0=\widetilde{v},\widetilde{a}_1^{(0)}=\widetilde{a}_1,\widetilde{a}_2^{(0)}=\widetilde{a}_2,\widetilde{c}_1^{(0)}=\widetilde{c}_1,\widetilde{c}_2^{(0)}=\widetilde{c}_2,\widetilde{f}_1^{(0)}=\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2^{(0)}=\widetilde{f}_2,$$

Тогда из системы (8)-(11) при условиях теоремы $\forall t\in[0,T]$ имеем

$$\left\|u_k(x,t)-\widetilde{u}_k(x,t)\right\|^2_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}}\leq q_5\left\|Q\left(u_{k-1}(x,t),v_{k-1}(x,t),a_1^{(k-1)}(t),c_1^{(k-1)}(t),f_1^{(k-1)}(t)\right)-\right.$$

$$\left.-Q\left(\widetilde{u}_{k-1}(x,t),\widetilde{v}_{k-1}(x,t),\widetilde{a}_1^{(k-1)}(t),\widetilde{c}_1^{(k-1)}(t),\widetilde{f}_1^{(k-1)}(t)\right)\right\|^2_{W_{x,t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2,0}(D_t)}, \tag{23}$$

$$\left\|v_k(x,t)-\widetilde{v}_k(x,t)\right\|^2_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}}\leq q_6\left\|\widetilde{Q}\left(u_{k-1}(x,t),v_{k-1}(x,t),a_1^{(k-1)}(t),c_1^{(k-1)}(t),f_1^{(k-1)}(t)\right)-\right.$$

$$\left.-\widetilde{Q}\left(\widetilde{u}_{k-1}(x,t),\widetilde{v}_{k-1}(x,t),\widetilde{a}_1^{(k-1)}(t),\widetilde{c}_1^{(k-1)}(t),\widetilde{f}_1^{(k-1)}(t)\right)\right\|^2_{W_{x,t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2,0}(D_t)}, \tag{24}$$

$$\left\|a_1^{(k)}(\tau)-\widetilde{a}_1^{(k)}(\tau)\right\|^2_{C[0,t]}\leq K_2q_7\left\|Q\left(u_{k-1}(x,t),v_{k-1}(x,t),a_1^{(k-1)}(t),c_1^{(k-1)}(t),f_1^{(k-1)}(t)\right)-\right.$$

$$\left.-Q\left(\widetilde{u}_{k-1}(x,t),\widetilde{v}_{k-1}(x,t),\widetilde{a}_1^{(k-1)}(t),\widetilde{c}_1^{(k-1)}(t),\widetilde{f}_1^{(k-1)}(t)\right)\right\|^2_{W_{x,t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,0}(D_t)}, \tag{25}$$

$$\left\|c_1^{(k)}(\tau)-\widetilde{c}_1^{(k)}(\tau)\right\|^2_{C[0,t]}\leq K_3q_8\left\|Q\left(u_{k-1}(x,t),v_{k-1}(x,t),a_1^{(k-1)}(t),c_1^{(k-1)}(t),f_1^{(k-1)}(t)\right)-\right.$$

$$\left.-Q\left(\widetilde{u}_{k-1}(x,t),\widetilde{v}_{k-1}(x,t),\widetilde{a}_1^{(k-1)}(t),c_1^{(k-1)}(t),f_1^{(k-1)}(t)\right)\right\|^2_{W_{x,t}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,0}}, \tag{26}$$

$$\left\|f_1^{(k)}(\tau)-\widetilde{f}_1^{(k)}(\tau)\right\|^2_{C[0,t]}\leq q_9K_4\left\|Q\left(u_{k-1}(x,t),v_{k-1}(x,t),a_1^{(k-1)}(t),c_1^{(k-1)}(t),f_1^{(k-1)}(t)\right)-\right.$$

$$-Q\left(\tilde{u}_{k-1}(x,t),\tilde{v}_{k-1}(x,t),\tilde{a}_1^{(k-1)}(t),c_1^{(k-1)}(t),f_1^{(k-1)}(t)\right)\Big\|^2_{W_{x,t}^{\left[\frac{n}{4}\right]+3,0}(D_t)}, \qquad (27)$$

$$\left\|a_2^{(k)}(\tau)-\tilde{a}_2^{(k)}(\tau)\right\|^2_{C[0,t]} \le q_{10}\tilde{K}_2\left\|\tilde{Q}\left(u_{k-1}(x,t),v_{k-1}(x,t),a_2^{(k-1)}(t),c_2^{(k-1)}(t),f_2^{(k-1)}(t)\right)-\right.$$

$$\left.-\tilde{Q}\left(\tilde{u}_{k-1}(x,t),\tilde{v}_{k-1}(x,t),\tilde{a}_2^{(k-1)}(t),\tilde{c}_2^{(k-1)}(t),\tilde{f}_2^{(k-1)}(t)\right)\right\|^2_{W_{x,t}^{\left[\frac{n}{4}\right]+3,0}}, \qquad (28)$$

$$\left\|c_2^{(k)}(\tau)-\tilde{c}_2^{(k)}(\tau)\right\|^2_{C[0,t]} \le q_{11}\tilde{K}_3\left\|\tilde{Q}\left(u_{k-1}(x,t),v_{k-1}(x,t),a_2^{(k-1)}(t),c_2^{(k-1)}(t),f_2^{(k-1)}(t)\right)-\right.$$

$$\left.-\tilde{Q}\left(\tilde{u}_{k-1}(x,t),\tilde{v}_{k-1}(x,t),\tilde{a}_2^{(k-1)}(t),\tilde{c}_2^{(k-1)}(t),\tilde{f}_2^{(k-1)}(t)\right)\right\|^2_{W_{x,t}^{\left[\frac{n}{4}\right]+3,0}}, \qquad (29)$$

$$\left\|f_2^{(k)}(\tau)-\tilde{f}_2^{(k)}(\tau)\right\|^2_{C[0,t]} \le q_{12}\tilde{K}_4\left\|\tilde{Q}\left(u_{k-1}(x,t),v_{k-1}(x,t),a_2^{(k-1)}(t),c_2^{(k-1)}(t),f_2^{(k-1)}(t)\right)-\right.$$

$$\left.-\tilde{Q}\left(\tilde{u}_{k-1}(x,t),\tilde{v}_{k-1}(x,t),\tilde{a}_2^{(k-1)}(t),\tilde{c}_2^{(k-1)}(t),\tilde{f}_2^{(k-1)}(t)\right)\right\|^2_{W_{x,t}^{\left[\frac{n}{4}\right]+3,0}}, \qquad (30)$$

где
$$K_i=\left(\max_{0\le t\le\tau}|\Delta(t)|\right)^{-2}3\sum_{j=1}^{3}\left\|A_{ij}(t)\right\|^2_{c[0,T]}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_s(x^i)}{\lambda_s^{\left[\frac{n}{4}\right]+1}}\right)^2 \quad (i=\overline{2,4}),$$

$$\tilde{K}_i=\left(\max_{0\le t\le\tau}|\tilde{\Delta}(t)|\right)^{-2}3\sum_{j=1}^{3}\left\|\tilde{A}_{ij}(t)\right\|^2_{c[0,T]}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_s(x^i)}{\lambda_s^{\left[\frac{n}{4}\right]+1}}\right)^2 \quad (i=\overline{2,4}),$$

$q>0\,(i=\overline{5,2})$ -некоторые постоянные не зависящие от $u,v,a_1,a_2,c_1,c_2,f_1,f_2$.

Отсюда получим
$$\left|W_k-\tilde{W}_k\right|\le K\left|W_{k-1}-\tilde{W}_{k-1}\right|, \qquad (31)$$

где
$$\left|W_k-\tilde{W}_k\right|=\left\|u_k(\xi,\tau)-\tilde{u}_k(\xi,\tau)\right\|^2_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}}+\left\|v_k(\xi,\tau)-\tilde{v}_k(\xi,\tau)\right\|^2_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}}+$$

$$+\left\|a_1^{(k)}(\tau)-\tilde{a}_1^{(k)}(\tau)\right\|^2_{c[0,t]}+\left\|a_2^{(k)}(\tau)-\tilde{a}_2^{(k)}(\tau)\right\|^2_{c[0,t]}+\left\|c_1^{(k)}(\tau)-\tilde{c}_1^{(k)}(\tau)\right\|^2_{c[0,t]}+$$

$$+\left\|c_2^{(k)}(\tau)-\tilde{c}_2^{(k)}(\tau)\right\|^2_{c[0,t]}+\left\|f_1^{(k)}(\tau)-\tilde{f}_1^{(k)}(\tau)\right\|^2_{c[0,t]}+\left\|f_2^{(k)}(\tau)-\tilde{f}_2^{(k)}(\tau)\right\|^2_{c[0,t]},$$

$$K=\left[2+\sum_{i=2}^{4}(K_i+\tilde{K}_i)\right]q_{13},$$

$q_{13}>0$ – некоторая постоянная, не зависящая от $u,v,a_1,a_2,c_1,c_2,f_1,f_2$.

Тогда по индукции нетрудно получить оценку
$$\left\|W_A-\tilde{W}_A\right\|_{E_T}\le\left\{\frac{K^n}{n!}\right\}^{1/2}\left\|W_0-\tilde{W}_0\right\|_{E_T}. \qquad (32)$$

Таким образом, итерация L^n оператора L удовлетворяет неравенству

$$\left\| L^n W - L^n \widetilde{W} \right\|_{E_T} \le \left\{ \frac{K^n}{n!} \right\}^{1/2} \left\| W - \widetilde{W} \right\|_{E_T} . \qquad (33)$$

Ясно, что при достаточно больших значениях n

$$\left\{ \frac{K^n}{n1} \right\}^{1/2} < 1 . \qquad (34)$$

А это означает, что соответствующая итерация L^n является сжимающей. Следовательно, при достаточно малых значениях T оператор L^n удовлетворяет на множестве K_R условию принципа сжатых отображений. Тогда единственная неподвижная точка W оператора L^n является и единственной в K_R неподвижной точкой для оператора L.

Таким образом, оператор L имеет в K_R единственную неподвижную точку $(u(x,t), v(x,t), a_1(t), a_2(t), c_1(t), c_2(t), f_1(t), f_2(t),)$

Тогда функции

$u(x,t) \in B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}, v(x,t) \in B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}, a_1(t), a_2(t), c_1(t), c_2(t), f_1(t), f_2(t),$ удовлетворяют на $[0,T]$ систему (8)-(11).

Легко можно показать, что $(u(x,t), v(x,t), a_1(t), a_2(t),$ $c_1(t), c_2(t),$ $f_1(t), f_2(t),)$ является классическим решением задачи (1)-(7).

Теперь покажем, что функции $u(x,t), v(x,t)$ удовлетворяют условиям (6), (7) , соответственно. Тогда из (8)-(9) в силу теоремы получим, что

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^2 \varphi_s \cos\lambda_s t \mu_s(x^i) - \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \Psi_s \sin\lambda_s t \cdot \mu_s(x^i) + a_1(t) b(x^i,t) \cdot u(x^i,t) +$$
$$+ c_1(t) d(x^i,t) v(x^i,t) + f_1(t) F(x^i,t) - \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^2 \int_0^t \int_\Omega \left[a_1(\tau) b(\xi,\tau) u(\xi,\tau) + \right.$$
$$\left. + c_1(\tau) d(\xi,\tau), v(\xi,\tau) + f_1(\tau) F(\xi,\tau) \right] \sin\lambda_s(t-\tau) \mu_s(\xi) d\xi d\tau \cdot \mu_s(x^i) \qquad (35)$$
$$(i = \overline{1,3})$$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = -\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^2 \widetilde{\varphi}_s \cos\lambda_s t \mu_s(x^i) - \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \widetilde{\Psi}_s \sin\lambda_s t \cdot \mu_s(x^i) + a_2(t) \widetilde{b}(x^i,t) \cdot u(x^i,t) +$$
$$+ c_2(t) \widetilde{d}(x^i,t) v(x^i,t) + f_2(t) G(x^i,t) - \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^2 \int_0^t \int_\Omega \left[a_2(\tau) \widetilde{b}(\xi,\tau) u(\xi,\tau) + \right.$$
$$\left. + c_2(\tau) \widetilde{d}(\xi,\tau), v(\xi,\tau) + f_2(\tau) G(\xi,\tau) \right] \sin\lambda_s(t-\tau) \mu_s(\xi) d\xi d\tau \cdot \mu_s(x^i) \qquad (36)$$
$$(i = \overline{1,3})$$

Из (10) и (11)имеем

$$h_i''(t) = -\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^2 \varphi_s \cos\lambda_s t \mu_s(x^i) - \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \Psi_s \sin\lambda_s t \cdot \mu_s(x^i) + a_1(t) b(x^i,t) \cdot h_i(t) +$$

$$\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s^2\int_0^t\int_\Omega[a_1(\tau)b(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+c_1(\tau)d(\xi,\tau),v(\xi,\tau)+$$

$$+f_1(\tau)F(\xi,\tau)]\sin\lambda_s(t-\tau)\times\mu_s(\xi)d\xi d\tau\cdot\mu_s(x^i)\qquad(i=\overline{1,3})\tag{37}$$

$$g_i''(t)=-\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s^2\widetilde{\varphi}_s\cos\lambda_s t\mu_s(x^i)-\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s\widetilde{\Psi}_s\sin\lambda_s t\cdot\mu_s(x^i)+a_2(t)\widetilde{b}(x^i,t)\cdot h_i(t)+$$

$$+c_2(t)\widetilde{d}(x^i,t)g_i(t)+f_2(t)G(x^i,t)-\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s^2\int_0^t\int_\Omega[a_2(\tau)\widetilde{b}(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+$$

$$+c_2(\tau)\widetilde{d}(\xi,\tau),v(\xi,\tau)+f_2(\tau)G(\xi,\tau)]\sin\lambda_s(t-\tau)\times$$

$$\times\mu_s(\xi)d\xi d\tau\cdot\mu_s(x^i)\qquad(i=\overline{1,3})\tag{38}$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial^2u(x^i,t)}{\partial t^2}-h_i''(t)=a_1(t)b(x^i,t)\cdot(u(x^i,t)-h_i(t)+$$

$$+c_1(t)d(x^it)(v(x^i,t)--g(t))\quad(i=\overline{1,3})\tag{39}$$

$$\frac{\partial^2v(x^i,t)}{\partial t^2}-g_i''(t)=a_2(t)\widetilde{b}(x^i,t)\cdot(v(x^i,t)-h_i(t)+$$

$$+c_2(t)\widetilde{d}(x^it)(v(x^i,t)-g_i(t))\quad(i=\overline{1,3})\tag{40}$$

в силу условия 7 данной теоремы:

$$\begin{aligned}&u(x^i,0)-h_i(0)=0\qquad(i=\overline{1,3})\\&\frac{\partial u}{\partial t}(x^i0)-h_i'(0)=0\qquad(i=\overline{1,3})\\&v(x^i,0)-g_i(0)=0\qquad(i=\overline{1,3})\\&\frac{\partial v}{\partial t}(x^i0)-g_i'(0)=0\qquad(i=\overline{1,3})\end{aligned}\tag{41}$$

Тогда для функции $u(x^i,t)-h_i(t)$ и $g(x^i,t)-g_i(t)$ $(i=\overline{1,3})$ получаем задачу Коши (40),(41). Отсюда имеем

$$u(x^i,t)-h_i(t)=0\qquad(i=\overline{1,3})\quad\forall t\in[0,\tau]$$

$$v(x^i,t)-g_i(t)=0\qquad(i=\overline{1,3})\quad\forall t\in[0,\tau]$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений.- Новосибирск. Наука, 1967, с.150.
2. Намазов Г. К. Обратные задачи теории уравнений математической физики.-Баку, АГУ, 1984, 128 с.
3. Искендеров А.Д. Многомерные обратные задачи для линейных и квази- линейных параболических уравнений.- ДАН СССР, 1975, т.225, № 5, с.1005-1008.
4. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений. – Дисс. докт. физ.-мат. наук, 1973 г., Азербайджанский Государственный Университет, 319 с.

5. Кулиев М.А. Многомерная обратная краевая задача для линейного параболического уравнения в ограниченной области. Вестник Бакинского университета, физико-математическая серия, № 2, 1999, с.116-127.
6. Кулиев М.А., Многомерная обратная краевая задача для линейного гиперболического уравнения в ограниченной области. –Дифференциальные уравнения, том 38, №1, 2002, с. 98-101.
7. Кулиев М А. Алхазова И Г. Многомерная обратная краевая задача для систем линейных параболических уравнений в ограниченной области. Вестник Бакинского университета, физико-математическая серия, № 4, 2003, с.25-34.

MƏHDUD OBLASTDA ÇOXÖLÇÜLÜ XƏTTİ HİPERBOLİK TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

M.Ə.QULİYEV

XÜLASƏ

İşdə ümumiləşmiş sıxılmış inikas prinsipinin köməyi ilə məhdud oblastda çoxölçülü xətti hiperbolik sistemlər üçün tərs sərhəd məsələsinin həllinin varlıq və yeganəliyi tədqiq olunmuşdur.

MULTIDIMENSIONAL INVERSE BOUNDARY PROBLEM FOR THE SISTEM OF LINEAR HYPERBOLIK EQUATIONS IN UN BOUNDED DOMAIN

M.A.GULIYEV

SUMMARY

In this work the theorem of the existence and uniqueness of the classical solution of the considered problem is proved by the generalized principle of compressed mappings.